

Tema 8

Circuitos en régimen permanente sinusoidal (II)

Objetivos (II)

- Representar cualquier circuito en alterna en el dominio de la frecuencia, determinar la impedancia o admitancia equivalente y calcular cualquier variable de interés
- Aplicar la transformación fasorial para analizar un circuito en régimen permanente sinusoidal, utilizando los métodos de análisis de nudos y mallas, y los teoremas de superposición, Thévenin y Norton

Contenidos (II)

- **Asociación de impedancias**
 - **Serie, paralelo, estrella-triángulo**
- **Métodos de análisis**
 - **Método de tensiones de nudo**
 - **Método de corrientes de malla**
- **Teoremas**
 - **Equivalente Helmholtz-Thévenin**
 - **Equivalente Norton**

Impedancias en serie

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n$$

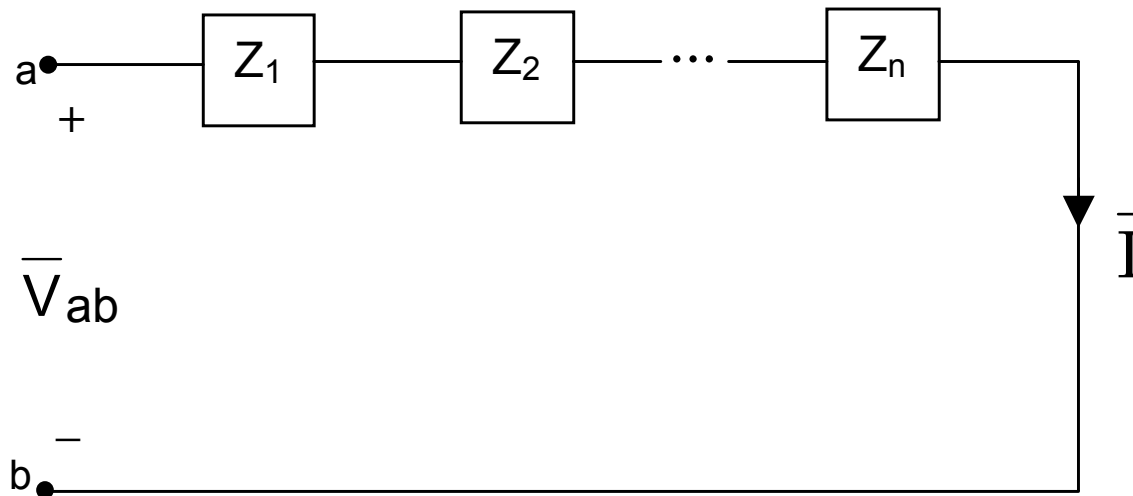
$$\bar{V}_{ab} = Z_1 \bar{I} + Z_2 \bar{I} + \dots + Z_n \bar{I}$$

$$\bar{V}_{ab} = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) \bar{I}$$

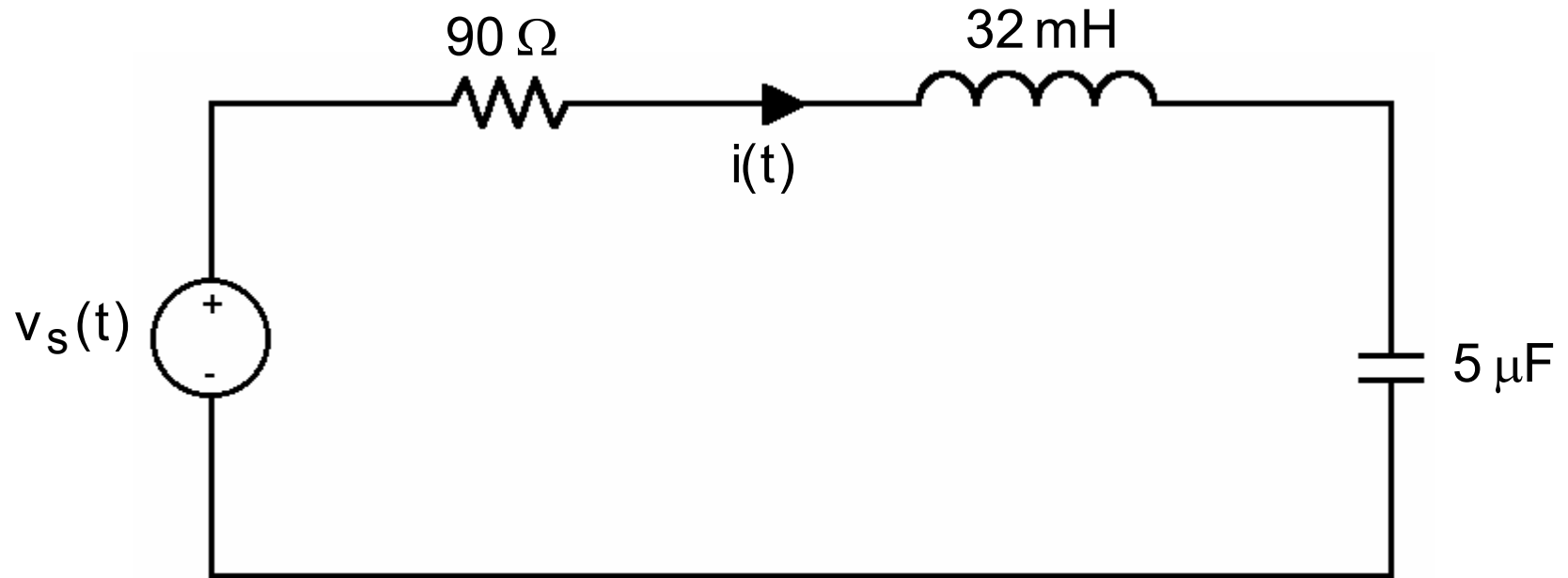
$$Z_{ab} = \frac{\bar{V}_{ab}}{\bar{I}} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Por los elementos en serie pasa la misma corriente

Las impedancias en serie se suman $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$



Ejemplo 8.3



Sea $v_s(t) = 750 \cos(5000t + 30^\circ)\text{ V}$

- a) Representar el circuito en el dominio de la frecuencia
- b) Calcular $i(t)$

Ejemplo 8.3 (I)

a) $\omega = 5000$ rad/s, la impedancia de la bobina es :

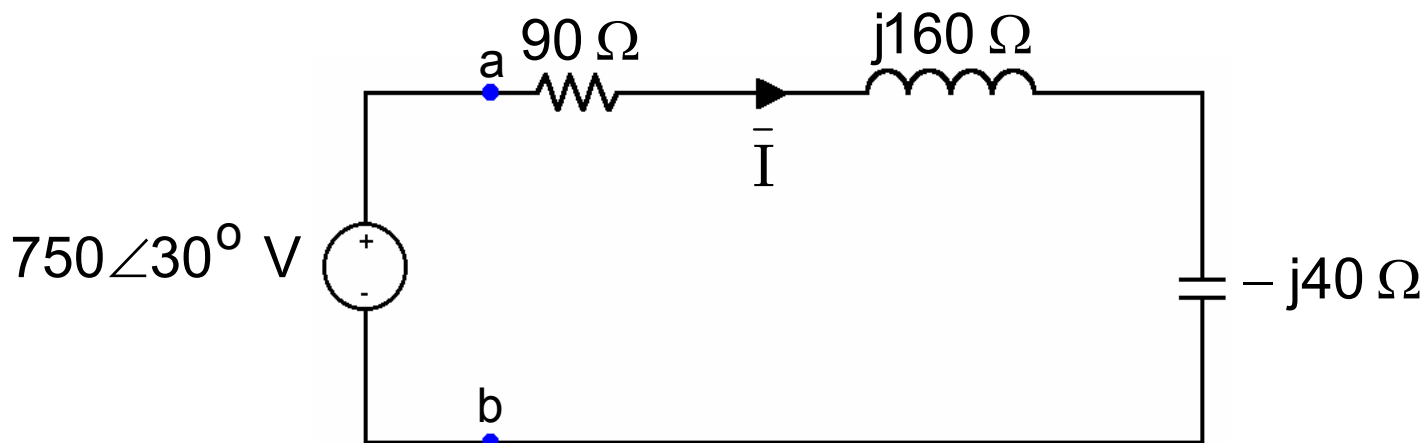
$$Z_L = j\omega L = j(5000)(32 \times 10^{-3}) = j160 \Omega$$

y la impedancia del condensador es :

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{10^6}{5000 \times 5} = -j40 \Omega$$

El fasor de tensión en la fuente : $\bar{V}_s = 750 \angle 30^\circ$ V

El circuito en el dominio de la frecuencia es :



Ejemplo 8.3 (II)

- b) El fasor de la corriente se calcula como el cociente entre la tensión de la fuente y la impedancia Z_{ab}

$$Z_{ab} = 90 + j160 - j40 = 90 + j120 = 150 \angle 53.13^\circ$$

por tanto,

$$\bar{I} = \frac{750 \angle 30^\circ}{150 \angle 53.13^\circ} = 5 \angle -23.13^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 5 \cos(5000t - 23.13^\circ) \text{ A}$$

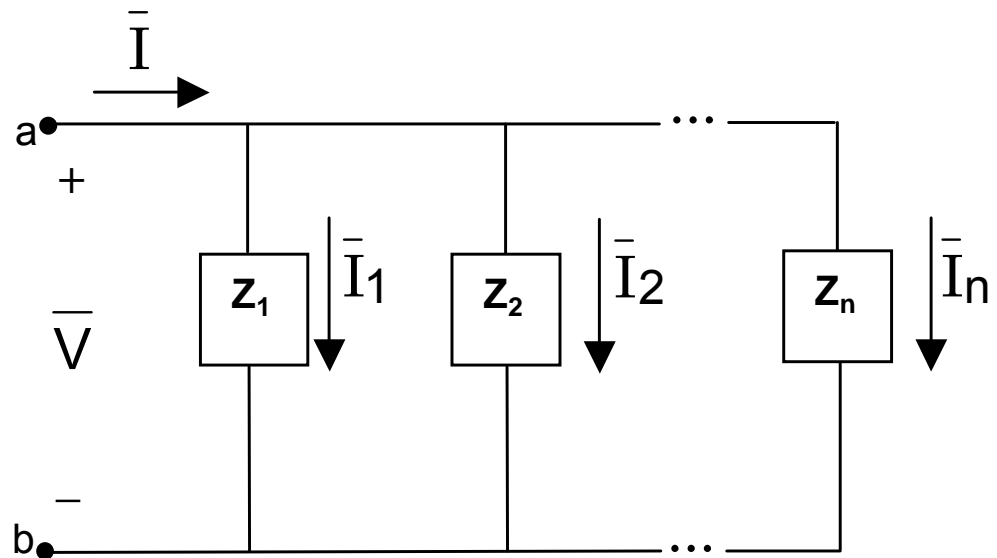
Impedancias en paralelo

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n$$

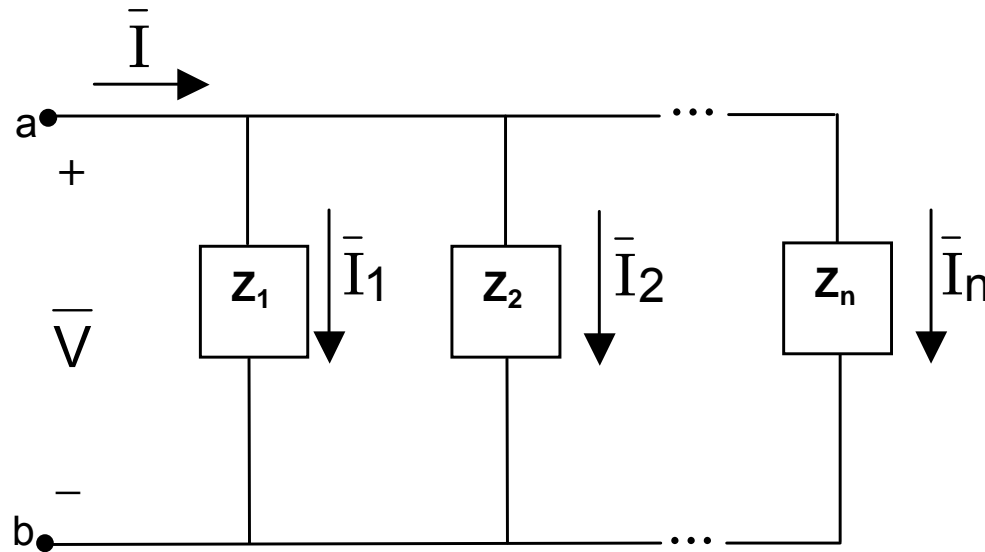
$$\frac{\bar{V}}{Z_{ab}} = \frac{\bar{V}}{Z_1} + \frac{\bar{V}}{Z_2} + \dots + \frac{\bar{V}}{Z_n}$$

$$\frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

Los elementos en paralelo están a la misma tensión



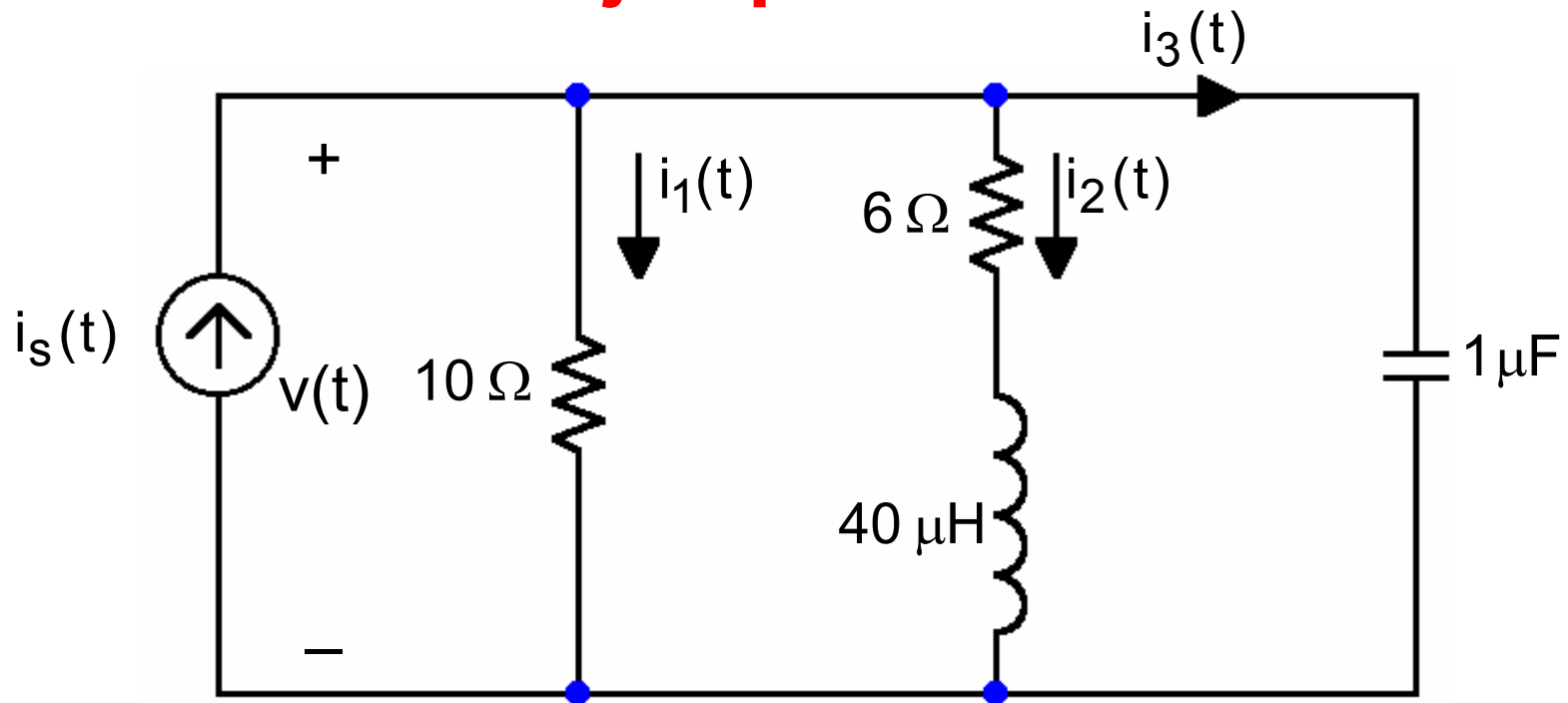
Impedancias en paralelo



La suma de las inversas de impedancias en paralelo es la inversa de la impedancia equivalente

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

Ejemplo 8.4



Sea $i_s(t) = 8 \cos (2 \times 10^5 t)$ [A]

- Representar el circuito en el dominio de la frecuencia
- Calcular $v(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$

Ejemplo 8.4 (I)

a) $\omega = 200000$ rad/s, la impedancia de la bobina es :

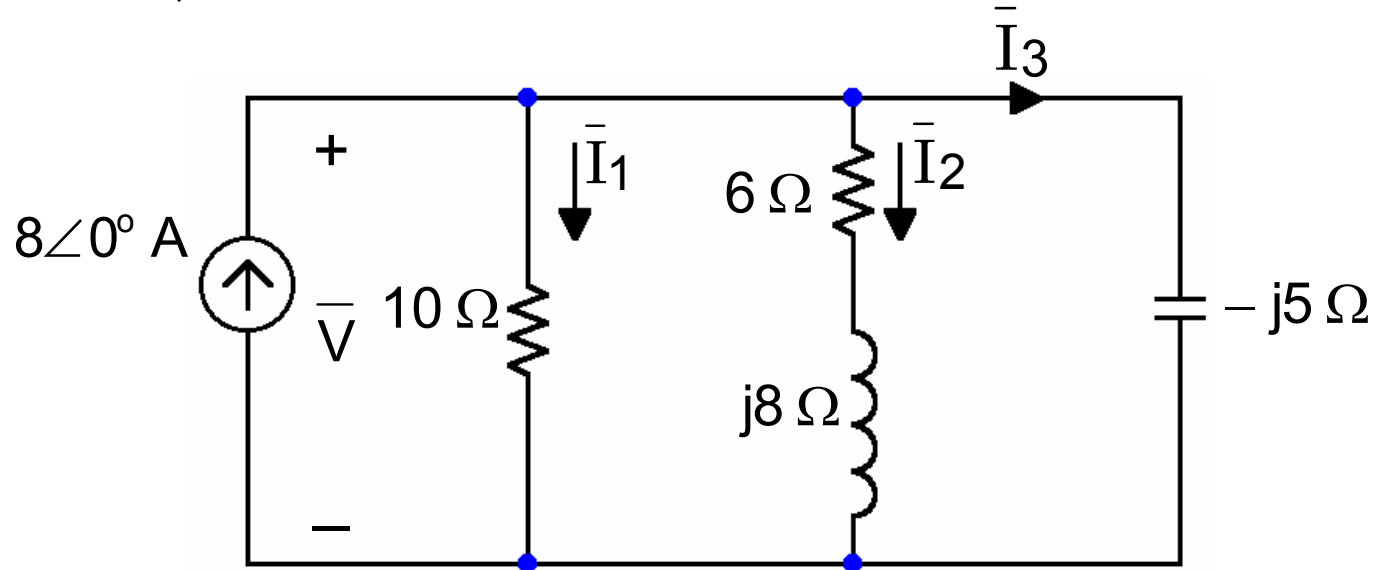
$$Z_L = j\omega L = j(2 \times 10^5)(40 \times 10^{-6}) = j8 \Omega$$

y la impedancia del condensador es :

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{10^6}{2 \times 10^5 \times 1} = -j5 \Omega$$

El fasor de corriente de la fuente : $\bar{I}_s = 8 \angle 0^\circ$ A

Finalmente, el circuito en el dominio de la frecuencia es :



Ejemplo 8.4 (II)

b)

Primero se calcula la admitancia de cada una de las ramas

$$Y_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ S}, \quad Y_2 = \frac{1}{6 + j8} = \frac{6 - j8}{100} = 0.06 - j0.08 \text{ S}, \quad Y_3 = \frac{1}{-j5} = j0.2 \text{ S}$$

La admitancia equivalente es :

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.16 + j0.12 = 0.2 \angle 36.87^\circ \text{ S}$$

La impedancia equivalente es :

$$Z = \frac{1}{Y} = 5 \angle -36.87^\circ \Omega$$

El fasor de tensión es :

$$\bar{V} = Z \bar{I} = 40 \angle -36.87^\circ \text{ V}$$

Ejemplo 8.4 (III)

b)

Finalmente,

$$\bar{I}_1 = \frac{40 \angle -36.87^\circ}{10} = 4 \angle -36.87^\circ = 3.2 - j2.4 \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{40 \angle -36.87^\circ}{6 + j8} = 4 \angle -90^\circ = -j4 \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{40 \angle -36.87^\circ}{5 \angle -90^\circ} = 8 \angle 53.13^\circ = 4.8 + j6.4 \text{ A}$$

En el dominio del tiempo se tiene :

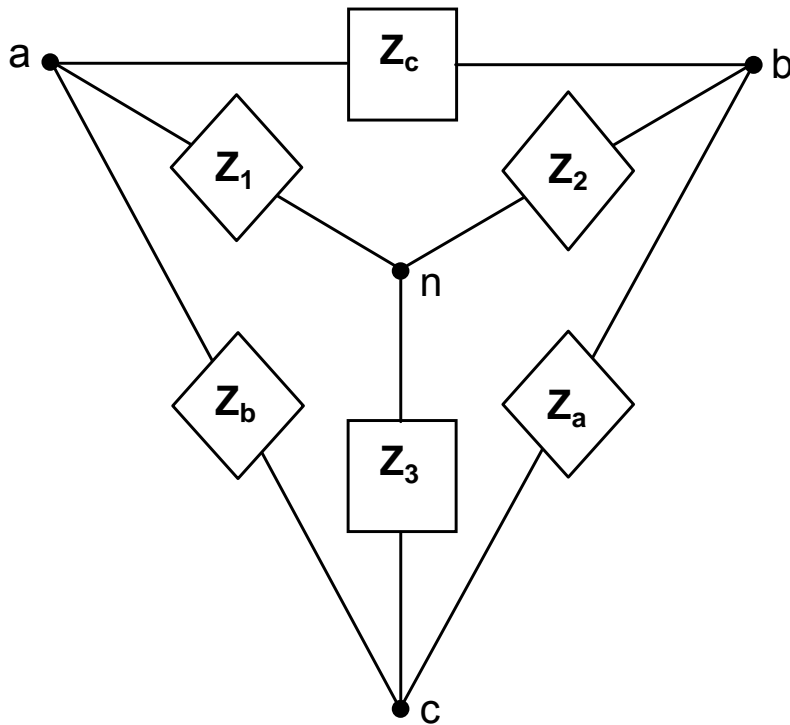
$$v(t) = 40 \cos(200000t - 36.87^\circ) \text{ V}$$

$$i_1(t) = 4 \cos(200000t - 36.87^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 4 \cos(200000t - 90^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = 8 \cos(200000t + 53.13^\circ) \text{ A}$$

Transformación estrella-triángulo



$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_2 = \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$$

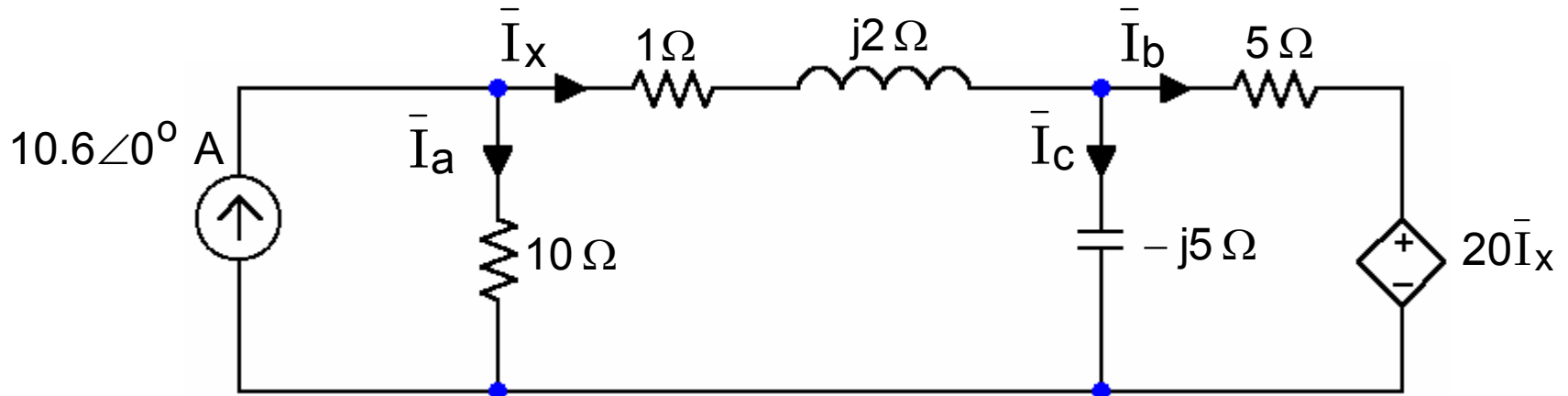
$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$$

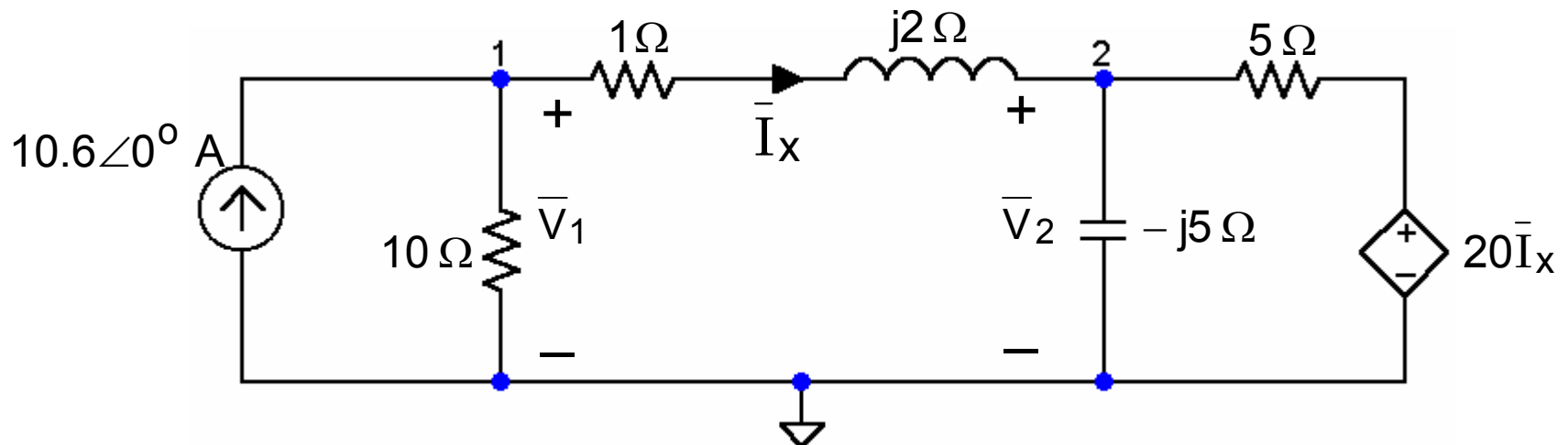
Método de tensiones de nudo

Análogo al método de las tensiones de nudo para corriente continua

Ejemplo 8.5



Mediante el método de nudos encontrar las corrientes de rama \bar{I}_a , \bar{I}_b e \bar{I}_c



Ejemplo 8.5 (I)

$$(1) \quad -10.6 + \frac{\bar{V}_1}{10} + \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{1 + j2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{1 + j2} + \frac{\bar{V}_2}{-j5} + \frac{\bar{V}_2 - 20\bar{I}_x}{5} = 0$$

$$(3) \quad \bar{I}_x = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{1 + j2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las tensiones :

$$\bar{V}_1 = 68.40 - j16.80 = 70.43 \angle -13.8^\circ \text{ V}$$

$$\bar{V}_2 = 68 - j26 = 72.8 \angle -20.92^\circ \text{ V}$$

Ejemplo 8.5 (II)

Por tanto, las corrientes de cada rama son :

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_1}{10} = 6.84 - j1.68 = 7.04 \angle -13.8^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_x = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{1 + j2} = 3.76 + j1.68 = 4.12 \angle 24.07^\circ \text{ A}$$

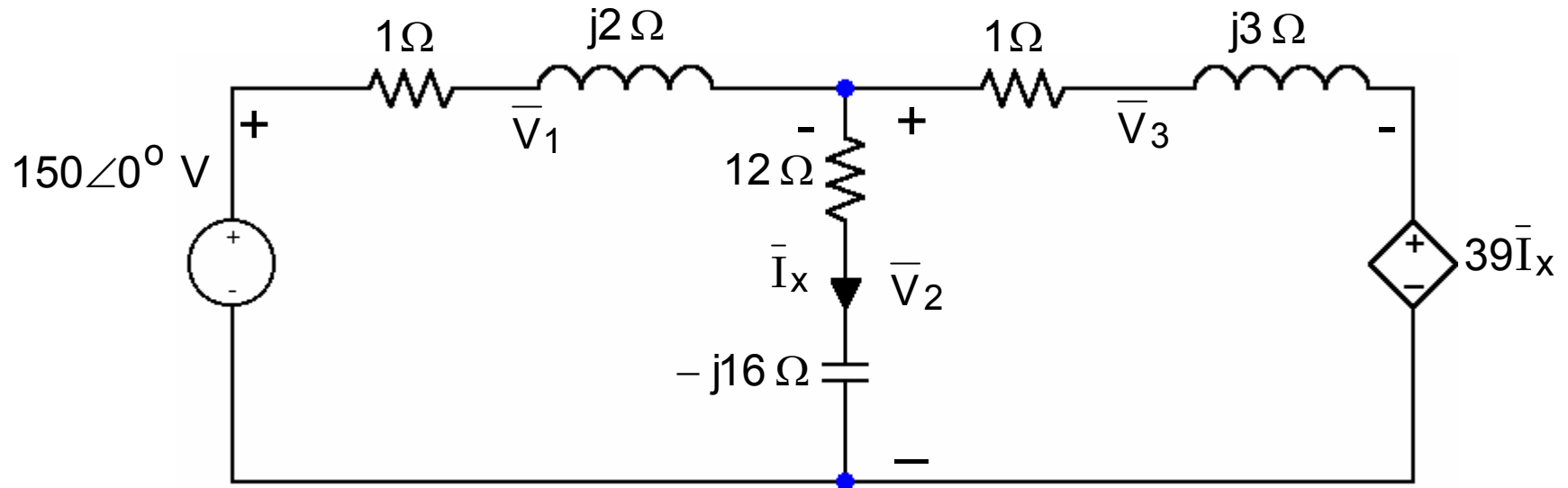
$$\bar{I}_b = \frac{\bar{V}_2 - 20\bar{I}_x}{5} = -1.44 - j11.92 = 12.01 \angle -96.89^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_c = \frac{\bar{V}_2}{-j5} = 5.2 + j13.6 = 14.56 \angle 69.07^\circ \text{ A}$$

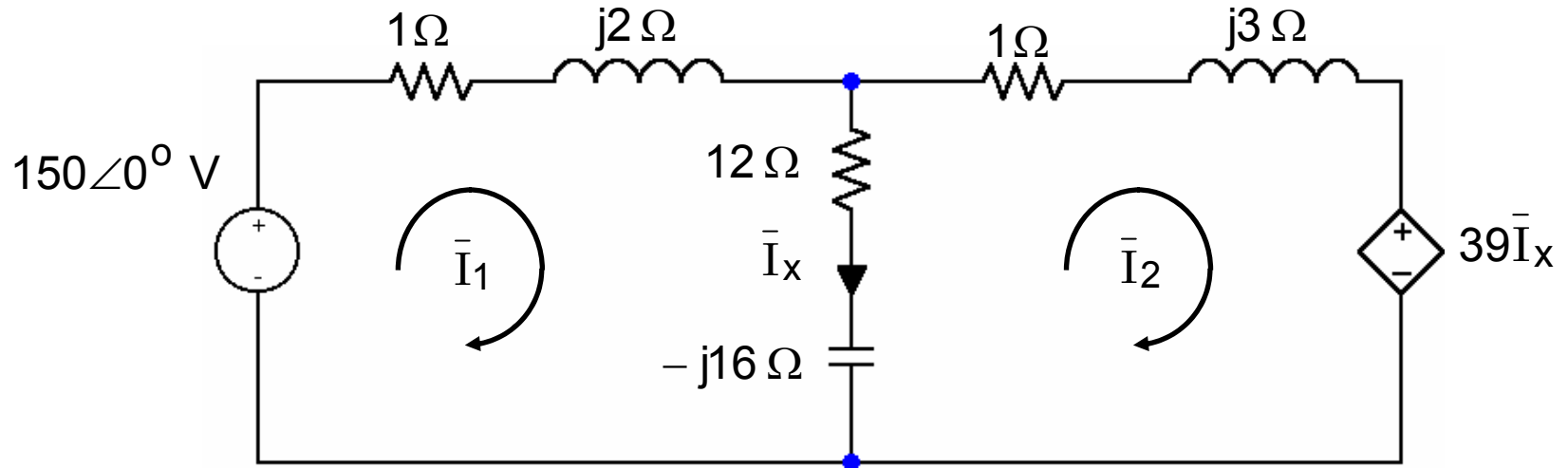
Método de corrientes de malla

Análogo al método de las corrientes de malla para corriente continua

Ejemplo 8.6



Mediante el método de mallas encontrar las tensiones \bar{V}_1 , \bar{V}_2 y \bar{V}_3



Ejemplo 8.6 (I)

$$(1) \quad 150 = (1 + j2)\bar{I}_1 + (12 - j16)(\bar{I}_1 - \bar{I}_2)$$

$$(2) \quad 0 = (12 - j16)(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) + (1 + j3)\bar{I}_2 + 39\bar{I}_x$$

$$(3) \quad \bar{I}_x = \bar{I}_1 - \bar{I}_2$$

Resolviendo el sistema se obtiene :

$$\bar{I}_1 = -26 - j52 = 58.14 \angle -116.56^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = -24 - j58 = 62.77 \angle -112.48^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_x = -2 + j6 = 6.32 \angle 108.43^\circ \text{ A}$$

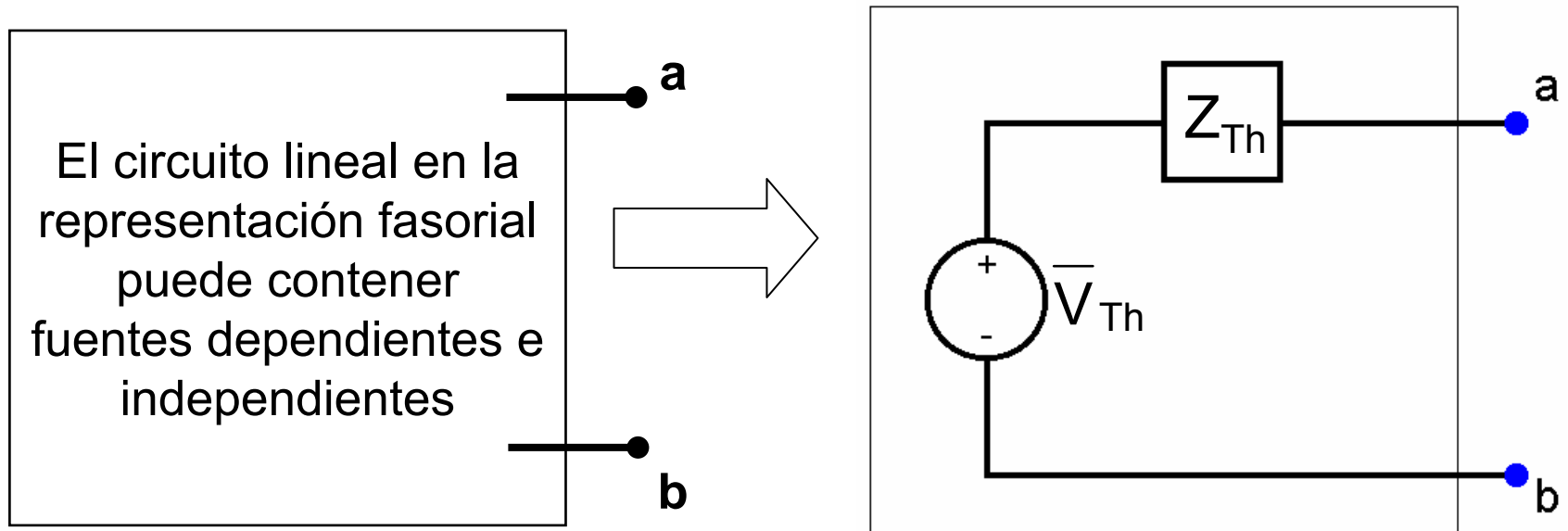
Finalmente, las tensiones son :

$$\bar{V}_1 = (1 + j2)\bar{I}_1 = 78 - j104 = 130 \angle -53.13^\circ \text{ V}$$

$$\bar{V}_2 = (12 - j16)\bar{I}_x = 72 + j104 = 126.49 \angle 55.30^\circ \text{ V}$$

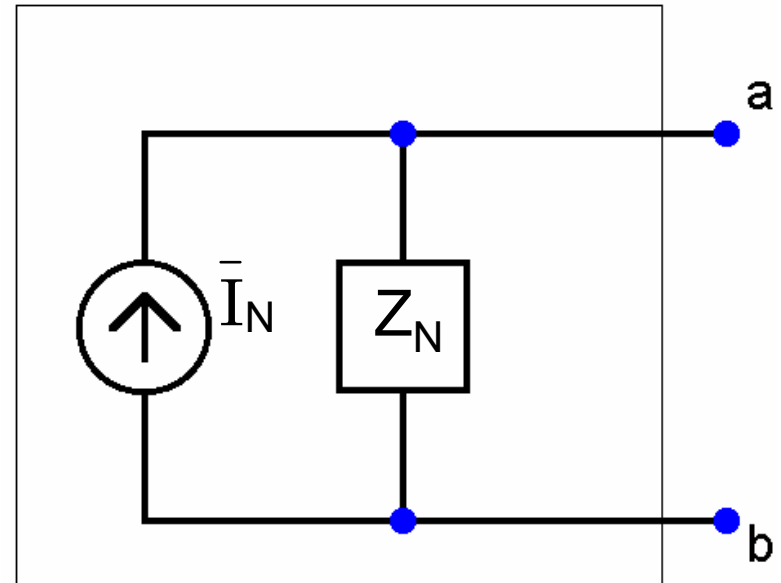
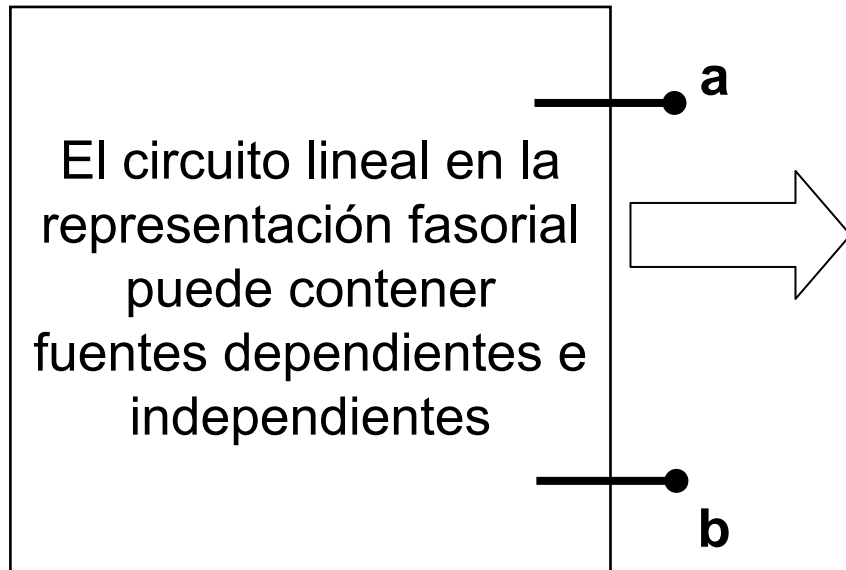
$$\bar{V}_3 = (1 + j3)\bar{I}_2 = 150 - j130 = 198.49 \angle -40.91^\circ \text{ V}$$

Equivalente Helmholtz-Thévenin



¡Sólamamente circuitos lineales!

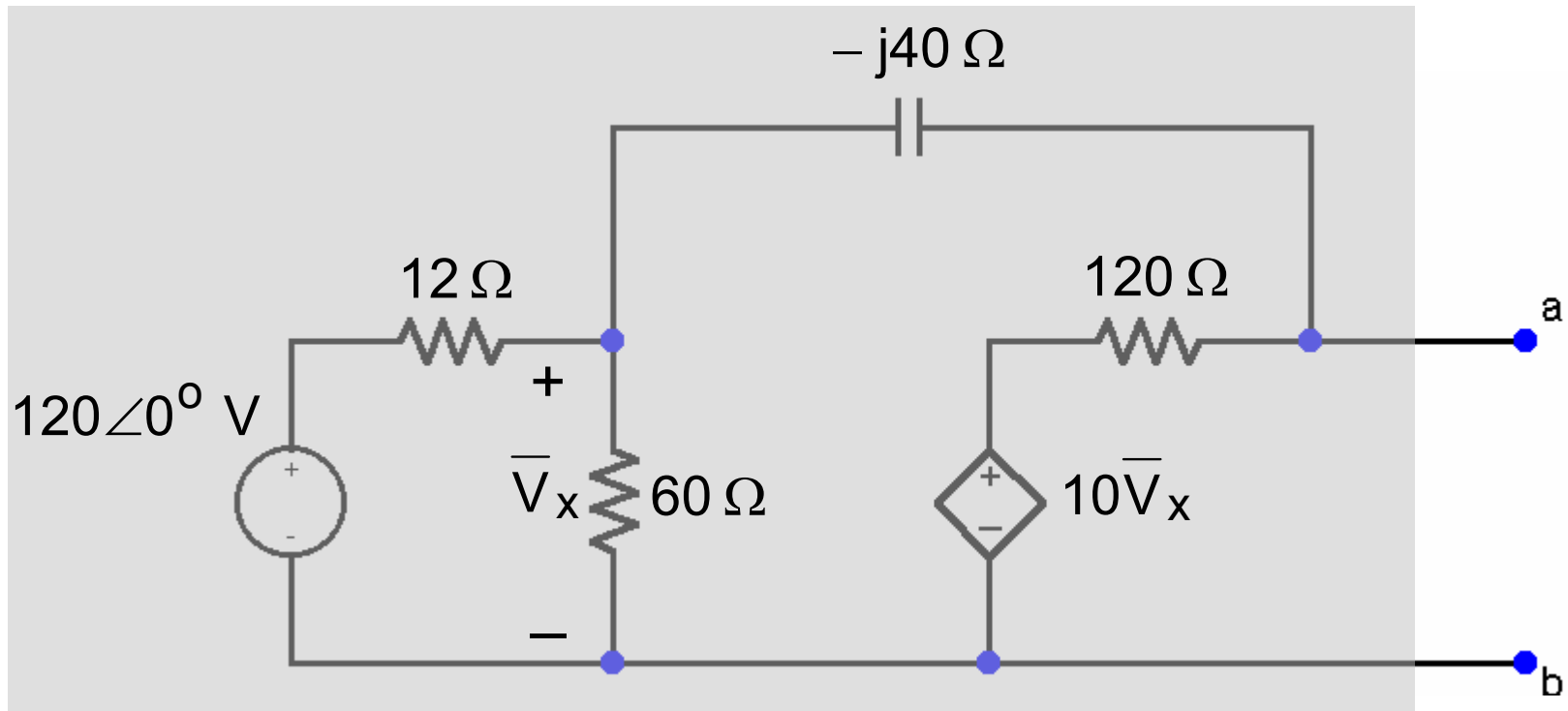
Equivalente Norton



$$Z_N = Z_{Th}$$

$$\bar{I}_N = \frac{\bar{V}_{Th}}{Z_{Th}}$$

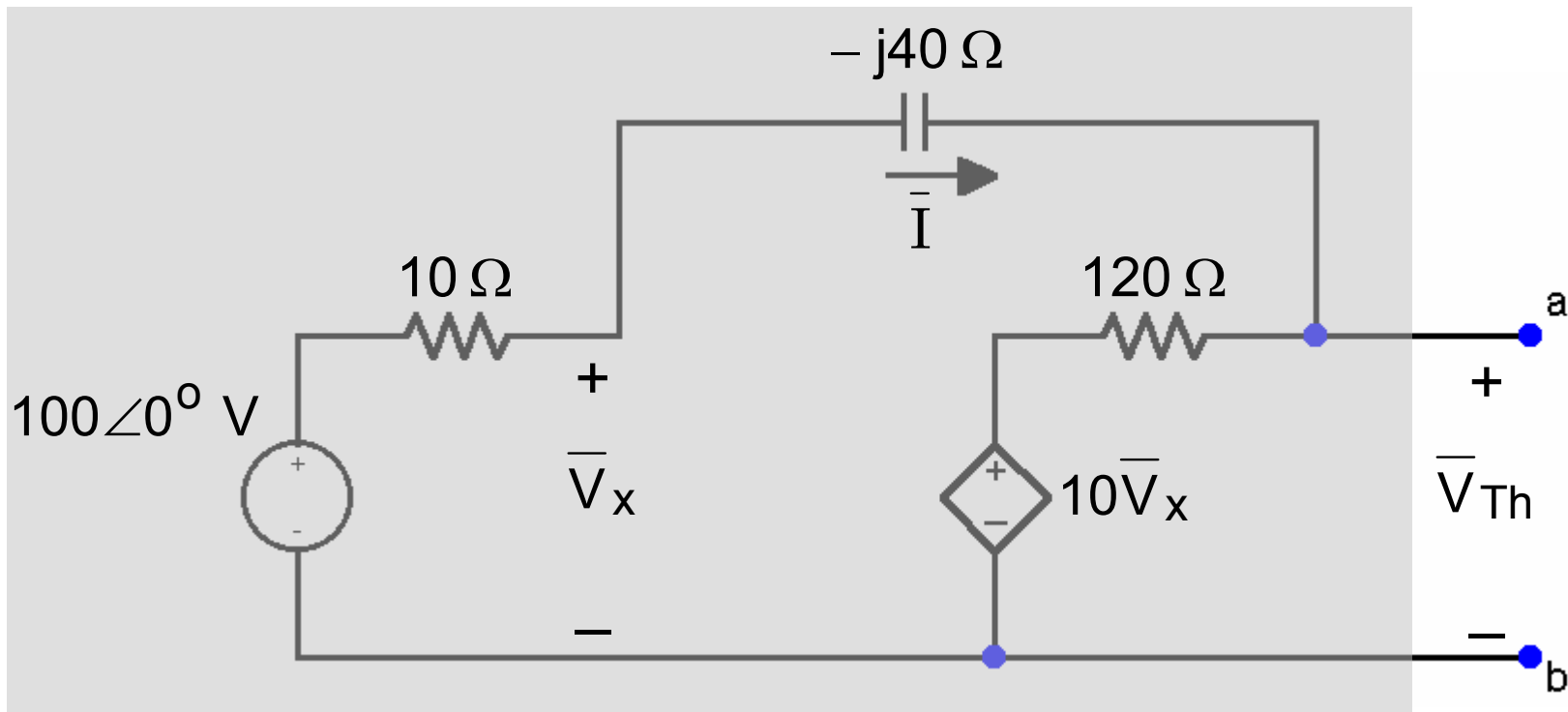
Ejemplo 8.7



Encontrar el circuito equivalente Thevenin respecto a los terminales a y b

Ejemplo 8.7 (I)

Para calcular la tensión de Thévenin se aplican dos transformaciones de fuentes y el circuito queda:



Ejemplo 8.7 (II)

El fasor de corriente se calcula como :

$$\begin{cases} 100 = 10\bar{I} - j40\bar{I} + 120\bar{I} + 10\bar{V}_x = (130 - j40)\bar{I} + 10\bar{V}_x \\ \bar{V}_x = 100 - 10\bar{I} \end{cases}$$

por tanto,

$$\bar{I} = \frac{-900}{30 - j40} = 18 \angle -126.87^\circ \text{ A}$$

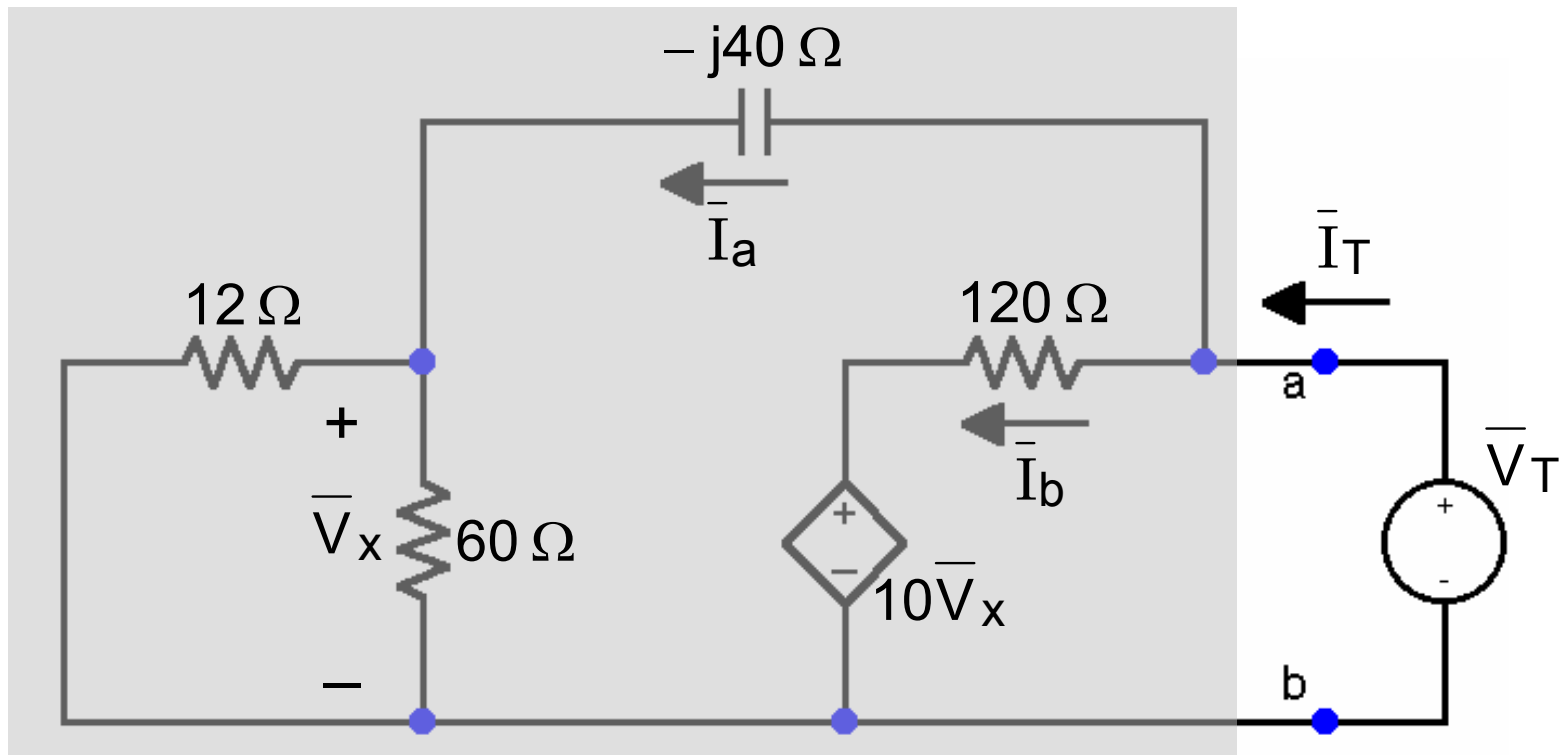
$$\bar{V}_x = 100 - 180 \angle -126.87^\circ = 208 + j144 \text{ V}$$

Finalmente, la tensión de Thévenin es :

$$\bar{V}_{Th} = 10\bar{V}_x + 120\bar{I} = 784 - j288 = 835.22 \angle -20.17^\circ \text{ V}$$

Ejemplo 8.7 (III)

La impedancia de Thévenin se calcula mediante el método de la fuente de prueba



Ejemplo 8.7 (IV)

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_T}{10 - j40}, \quad \bar{V}_x = 10\bar{I}_a$$

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{V}_T - 10\bar{V}_x}{120} = \frac{-\bar{V}_T(9 + j4)}{120(1 - j4)}$$

$$\bar{I}_T = \bar{I}_a + \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_T}{10 - j40} \left(1 - \frac{9 + j4}{12} \right) = \frac{\bar{V}_T(3 - j4)}{12(10 - j40)}$$

$$Z_{Th} = \frac{\bar{V}_T}{\bar{I}_T} = 91.2 - j38.4 \, \Omega$$

